内蒙古开放大学
Inner Mongolia Open University

函　数

乌兰察布开放大学

主讲人：赵晓燕

《高等数学基础》课程网络教学实施团队：李燕清

第一节函 数

一、基本概念
二、函数概念
三、函数的特性
四、反函数
五、小结 思考题

一、基本概念

1. 集合: 具有某种特定性质的事物的<u>总体</u>.

组成这个集合的事物称为该集合的<u>元素</u>.

$a \in M, \qquad a \notin M,$

$A = \{a_1, a_2, \cdots, a_n\}$ 有限集

$M = \{x \mid x\text{所具有的特征}\}$ 无限集

若$x \in A$,则必$x \in B$,就说A是B的子集.

记作 $A \subset B$.

内蒙古开放大学
Inner Mongolia Open University

数集分类:

N----自然数集　　Z----整数集

Q----有理数集　　R----实数集

数集间的关系: $N \subset Z,\ Z \subset Q,\ Q \subset R.$

若$A \subset B$,且$B \subset A$,就称集合A与B相等.

例如 $A = \{1,2\}$,

$C = \{x \mid x^2 - 3x + 2 = 0\}$, 则 $A = C$.

不含任何元素的集合称为空集. (记作 $\varnothing$)

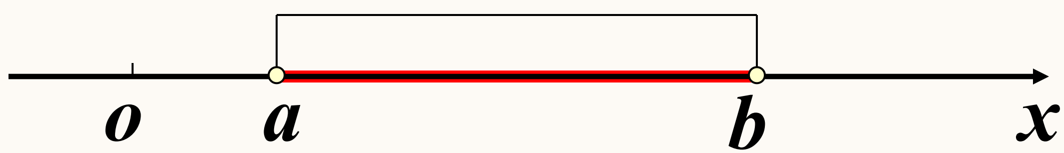
例如, $\{x \mid x \in R, x^2 + 1 = 0\}$

规定　空集为任何集合的子集.

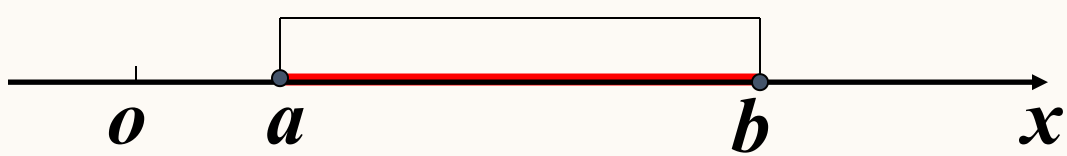
2. 区间: 是指介于某两个实数之间的全体实数. 这两个实数叫做区间的端点.

$\forall\, a, b \in R$, 且 $a < b$.

$\{x \mid a < x < b\}$ 称为开区间，记作 (a, b)



$\{x \mid a \le x \le b\}$ 称为闭区间，记作 $[a, b]$



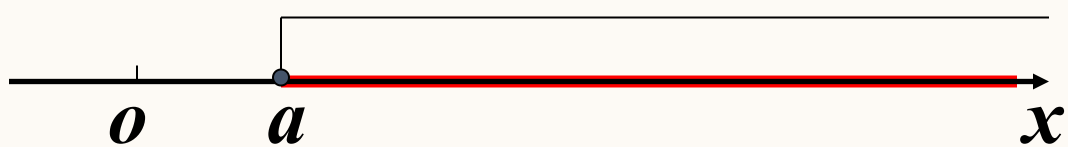
$\{x \mid a \le x < b\}$ 称为半开区间，记作 $[a,b)$

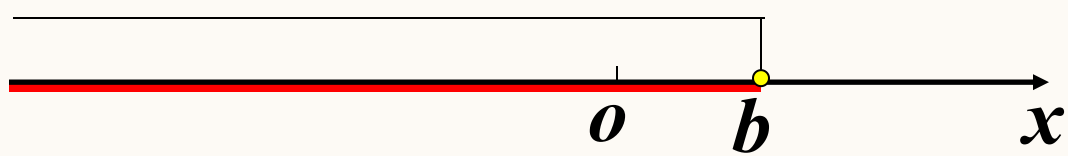
$\{x \mid a < x \le b\}$ 称为半开区间，记作 $(a,b]$

有限区间

$[a,+\infty) = \{x \mid a \le x\}$ $\quad$ $(-\infty,b) = \{x \mid x < b\}$

无限区间





区间长度的定义：

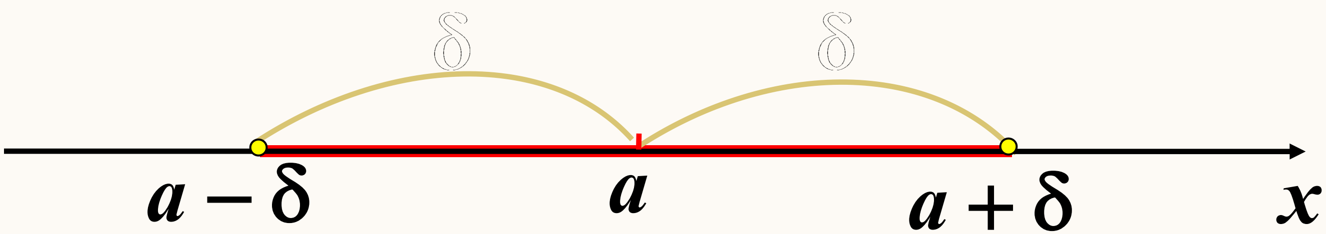
两端点间的距离(线段的长度)称为区间的长度.

3. 邻域： 设a与δ是两个实数，且$\delta > 0$.

数集$\{x \mid |x-a| < \delta\}$称为点$a$的$\delta$邻域，

点a叫做这邻域的中心，δ叫做这邻域的半径 .

$$U_{\delta}(a) = \{x \mid a-\delta < x < a+\delta\}.$$



点a的去心的δ邻域，记作$U_{\delta}^{0}(a)$.

$$U_{\delta}(a) = \{x \mid 0 < |x-a| < \delta\}.$$

4. 常量与变量:

在某过程中数值保持不变的量称为常量,

而数值变化的量称为变量.

注意　常量与变量是相对“过程”而言的.

常量与变量的表示方法:

通常用字母a, b, c等表示常量,

用字母x, y, t等表示变量.

5. 绝对值:

$$|a| = \begin{cases} a & a \geq 0 \\ -a & a < 0 \end{cases} \qquad (|a| \geq 0)$$

运算性质: $|ab| = |a||b|$;

$$\left|\frac{a}{b}\right| = \frac{|a|}{|b|}; \qquad |a| - |b| \leq |a \pm b| \leq |a| + |b|.$$

绝对值不等式:

$$|x| \leq a \ (a > 0) \Longleftrightarrow -a \leq x \leq a;$$

$$|x| \geq a \ (a > 0) \Longleftrightarrow x \geq a \text{ 或 } x \leq -a;$$

二、函数概念

定义 设x和y是两个变量，D是一个给定的数集，如果对于每个数$x \in D$，变量y按照一定法则总有确定的数值和它对应，则称y是x的<u>函数</u>，记作

$$y = f(x)$$

数集D叫做这个函数的<u>定义域</u>

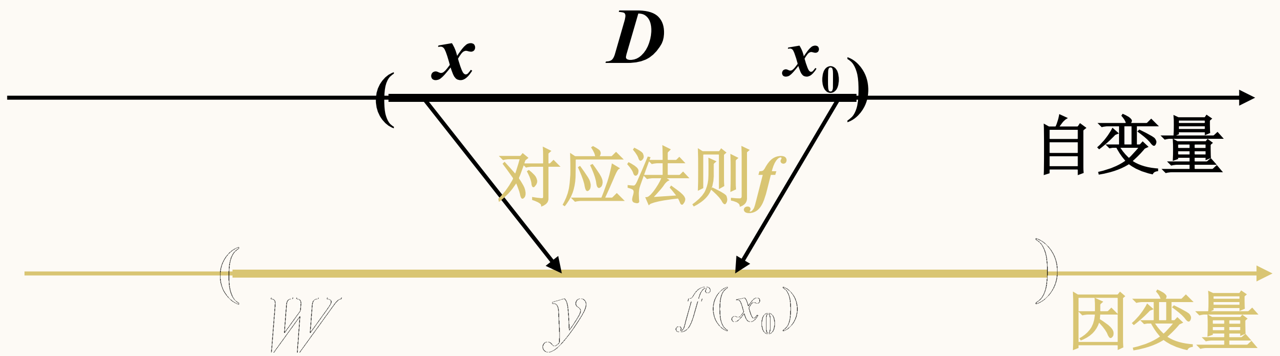
因变量　　自变量

当$x_0 \in D$时，称$f(x_0)$为函数在点x_0处的函数值.

函数值全体组成的数集

$W = \{y \mid y = f(x), x \in D\}$ 称为函数的值域.

函数的两要素： 定义域与对应法则.

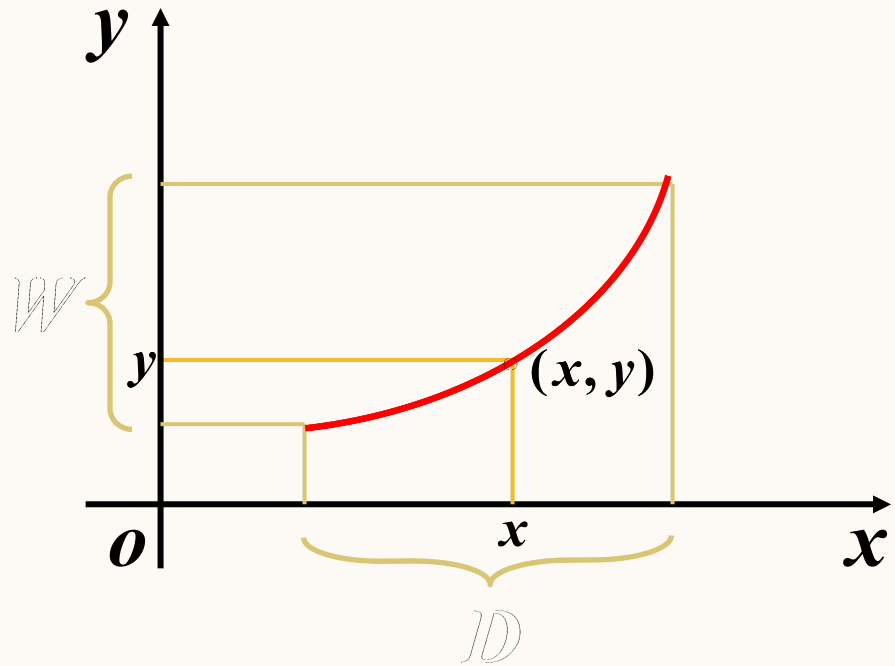


约定： 定义域是自变量所能取的使算式有意义的一切实数值.

例如， $y=\sqrt{1-x^2}$ $\quad D:[-1,1]$

例如， $y=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ $\quad D:(-1,1)$

如果自变量在定义域内任取一个数值时，对应的函数值总是只有一个，这种函数叫做单值函数，否则叫与多值函数.



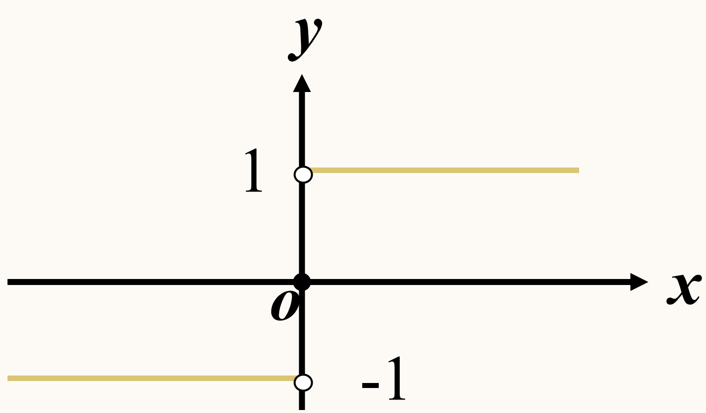
例如，$x^2 + y^2 = a^2$.

定义： 点集$C = \{(x, y) \mid y = f(x), x \in D\}$称为函数$y = f(x)$的图形.

几个特殊的函数举例

(1) 符号函数

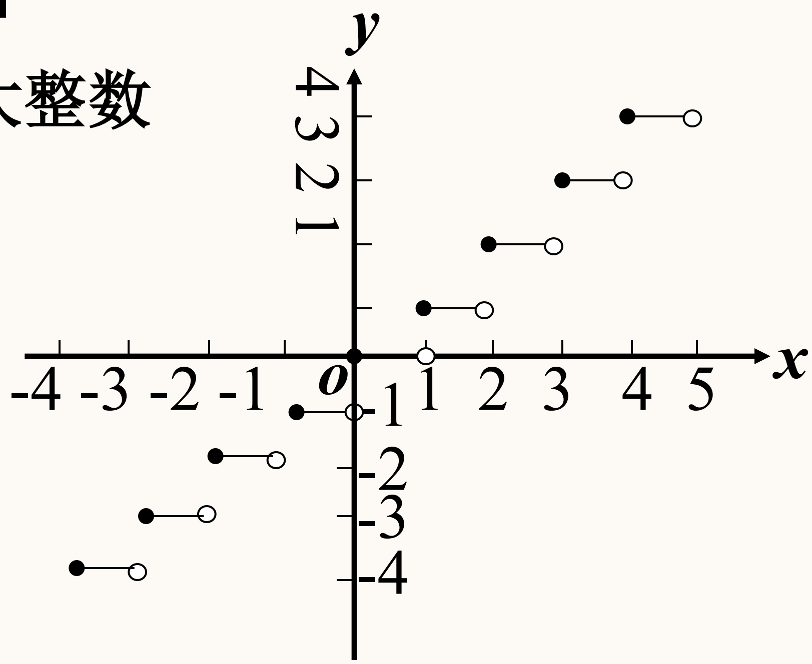
$$y = \operatorname{sgn} x = \begin{cases} 1 & \text{当} x > 0 \\ 0 & \text{当} x = 0 \\ -1 & \text{当} x < 0 \end{cases}$$



$$x = \operatorname{sgn} x \cdot |x|$$

(2) 取整函数 $y=[x]$

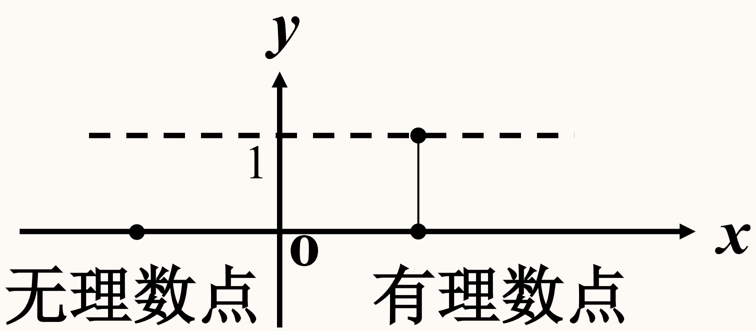
$[x]$表示不超过x 的最大整数



阶梯曲线

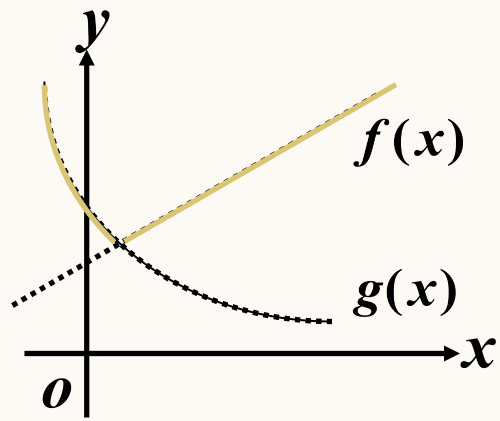
(3) 狄利克雷函数

$$y = D(x) = \begin{cases} 1 & \text{当}x\text{是有理数时} \\ 0 & \text{当}x\text{是无理数时} \end{cases}$$

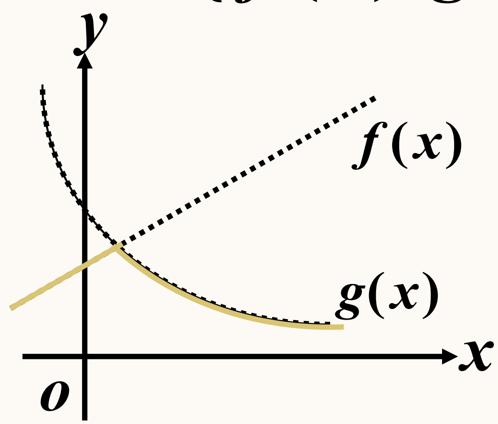


(4) 取最值函数

$$y = \max\{f(x), g(x)\}$$

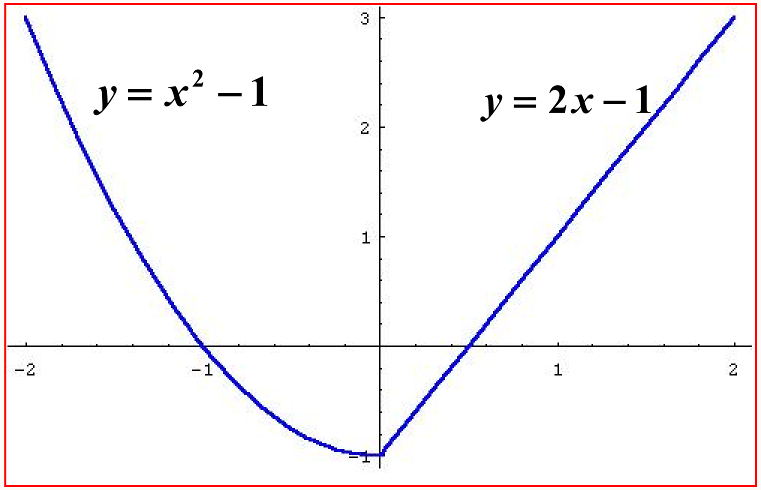


$$y = \min\{f(x), g(x)\}$$



在自变量的不同变化范围中,对应法则用不同的式子来表示的函数,称为<u>分段函数</u>.

例如，$f(x)=\begin{cases} 2x-1, & x>0 \\ x^2-1, & x\le 0 \end{cases}$



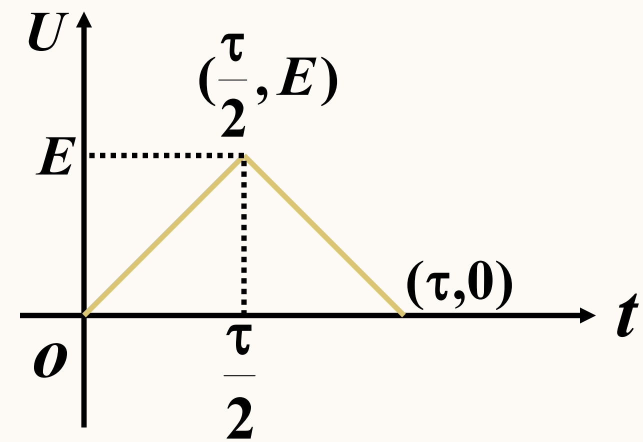
例1 脉冲发生器产生一个单三角脉冲,其波形如图所示,写出电压U与时间$t(t \geq 0)$的函数关系式.

解 当$t \in [0, \frac{\tau}{2}]$时,

$$U = \frac{E}{\frac{\tau}{2}} t = \frac{2E}{\tau} t;$$

当$t \in (\frac{\tau}{2}, \tau]$时,

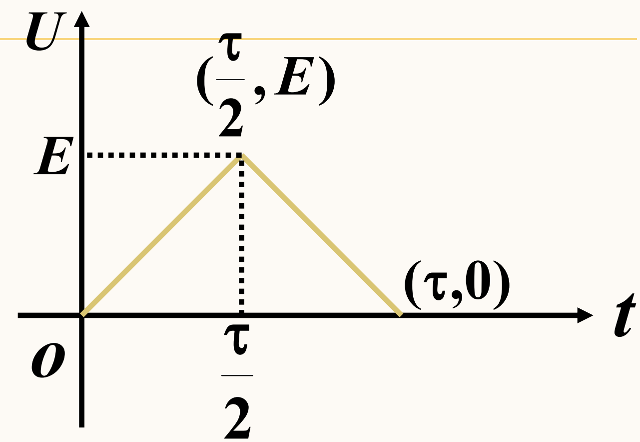
$$U - 0 = \frac{E - 0}{\frac{\tau}{2} - \tau} \cdot (t - \tau),\quad \text{即 } U = -\frac{2E}{\tau}(t - \tau)$$



单三角脉冲信号的电压

当 $t\in(\tau,+\infty)$ 时，$U=0$.

$\therefore U=U(t)$ 是一个分段函数，其表达式为



$$U(t)=\begin{cases}\dfrac{2E}{\tau}t, & t\in[0,\dfrac{\tau}{2}]\\ -\dfrac{2E}{\tau}(t-\tau), & t\in(\dfrac{\tau}{2},\tau]\\ 0, & t\in(\tau,+\infty)\end{cases}$$

例2

设$f(x)=\begin{cases}1 & 0\le x\le 1\\ -2 & 1<x\le 2\end{cases}$，求函数 $f(x+3)$的定义域.

解 $\because f(x)=\begin{cases}1 & 0\le x\le 1\\ -2 & 1<x\le 2\end{cases}$

$$\therefore f(x+3)=\begin{cases}1 & 0\le x+3\le 1\\ -2 & 1<x+3\le 2\end{cases}$$

$$=\begin{cases}1 & -3\le x\le -2\\ -2 & -2<x\le -1\end{cases}$$

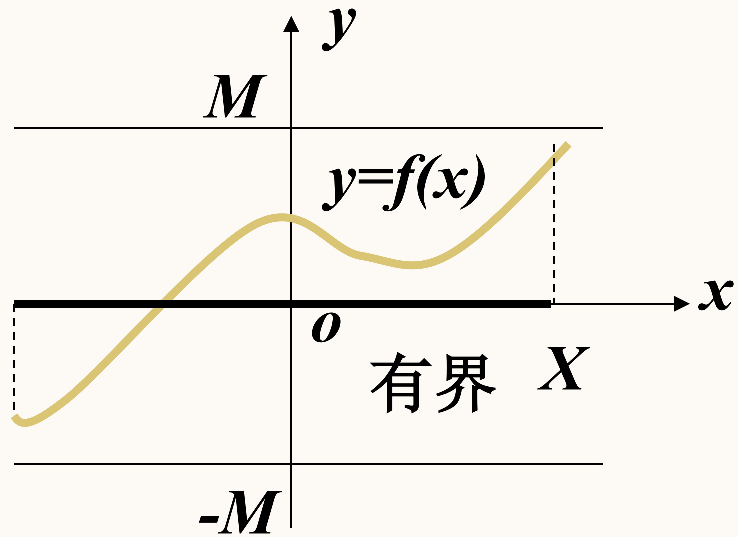
故 $D_f:[-3,-1]$

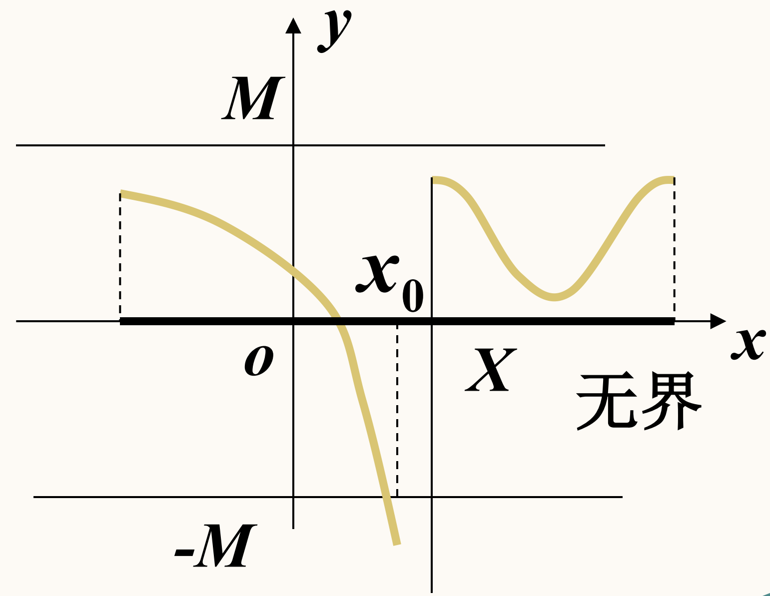
三、函数的特性

1. 函数的有界性:

若$X \subset D, \exists M > 0, \forall x \in X$,有 $|f(x)| \le M$ 成立,

则称函数$f(x)$在X上有界.否则称无界.





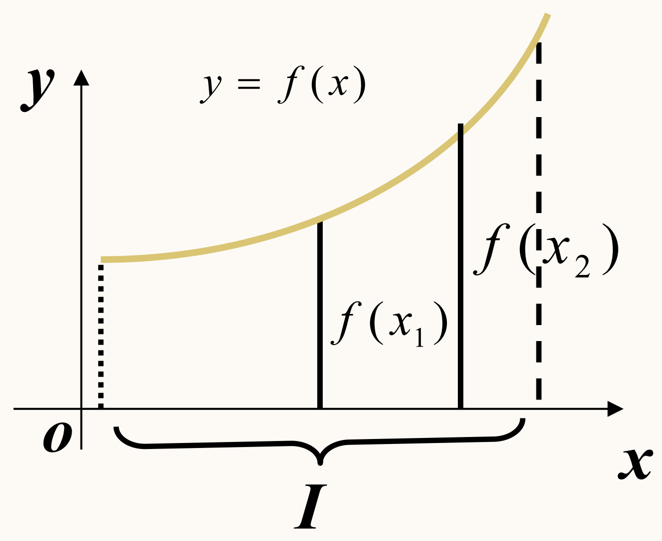
2. 函数的单调性:

设函数 $f(x)$的定义域为D，区间$I \in D$，

如果对于区间 I 上任意两点 x_1及 x_2，当$x_1 < x_2$时，

恒有 (1) $f(x_1) < f(x_2)$，

则称函数 $f(x)$在区间I上是单调增加的；

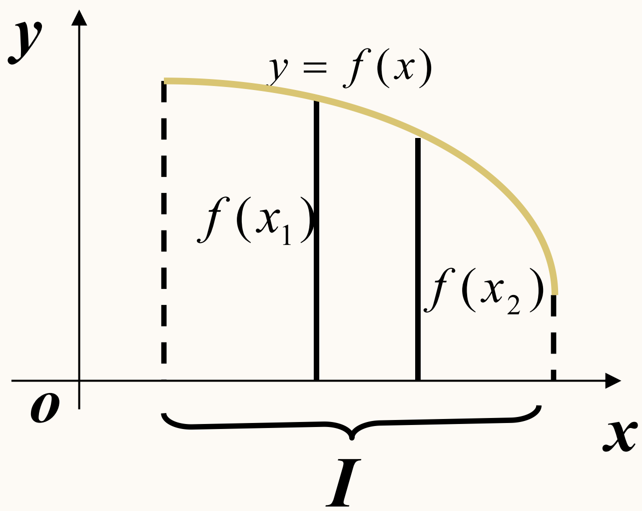


设函数 $f(x)$的定义域为D，区间$I \in D$，

如果对于区间 I 上任意两点 x_1及 x_2，当$x_1 < x_2$时，

恒有 (2) $f(x_1) > f(x_2)$，

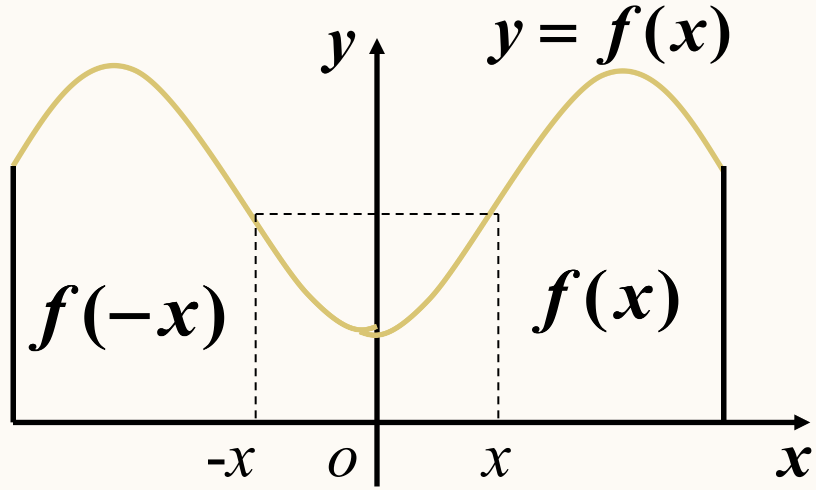
则称函数 $f(x)$在区间 I上是单调减少的；



3. 函数的奇偶性:

设D关于原点对称，对于$\forall x \in D$，有

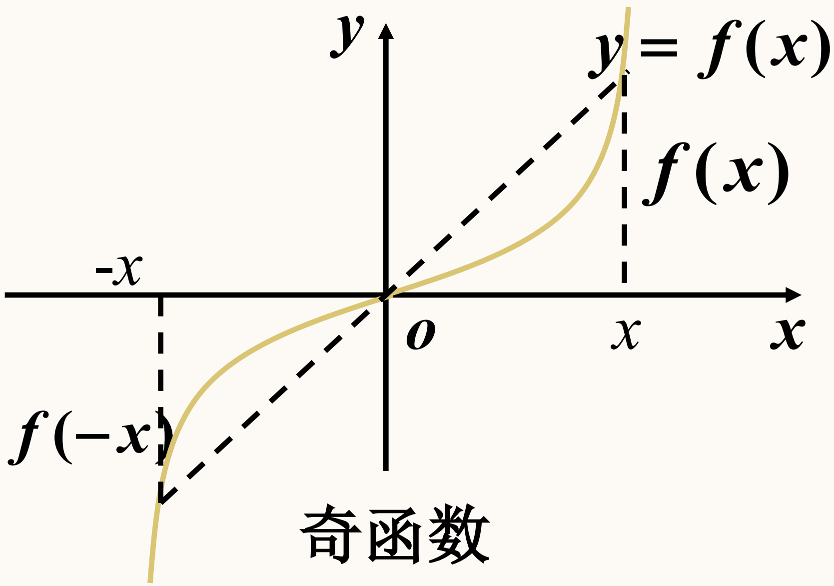
$f(-x)=f(x)$ 称 $f(x)$为偶函数；



偶函数

设D关于原点对称，对于$\forall x\in D$，有

$f(-x)=-f(x)$　称 $f(x)$为奇函数；

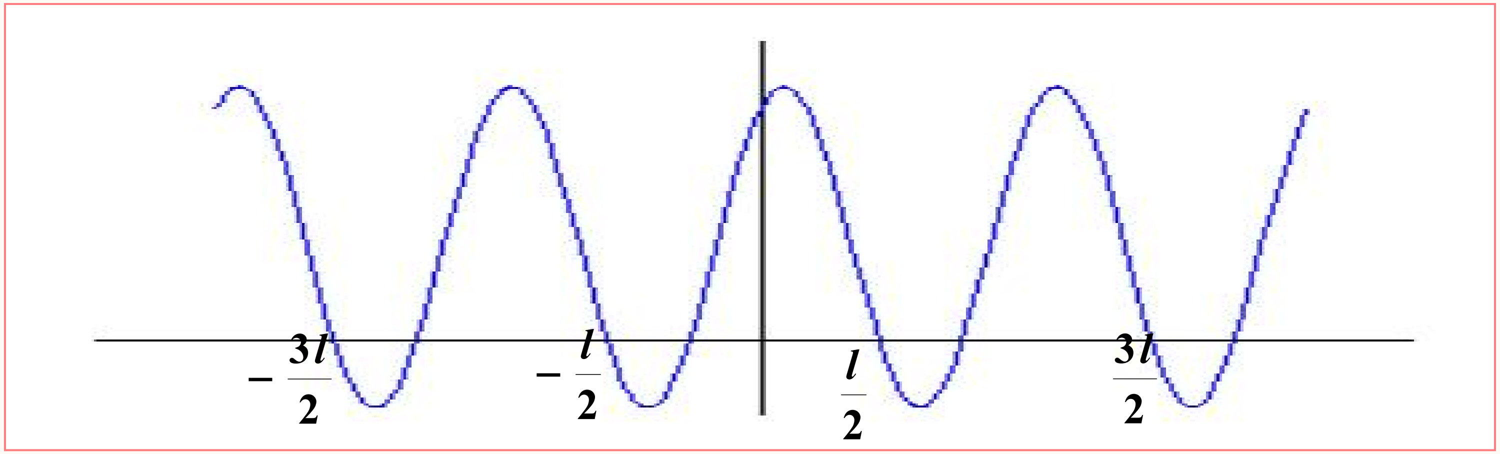


奇函数

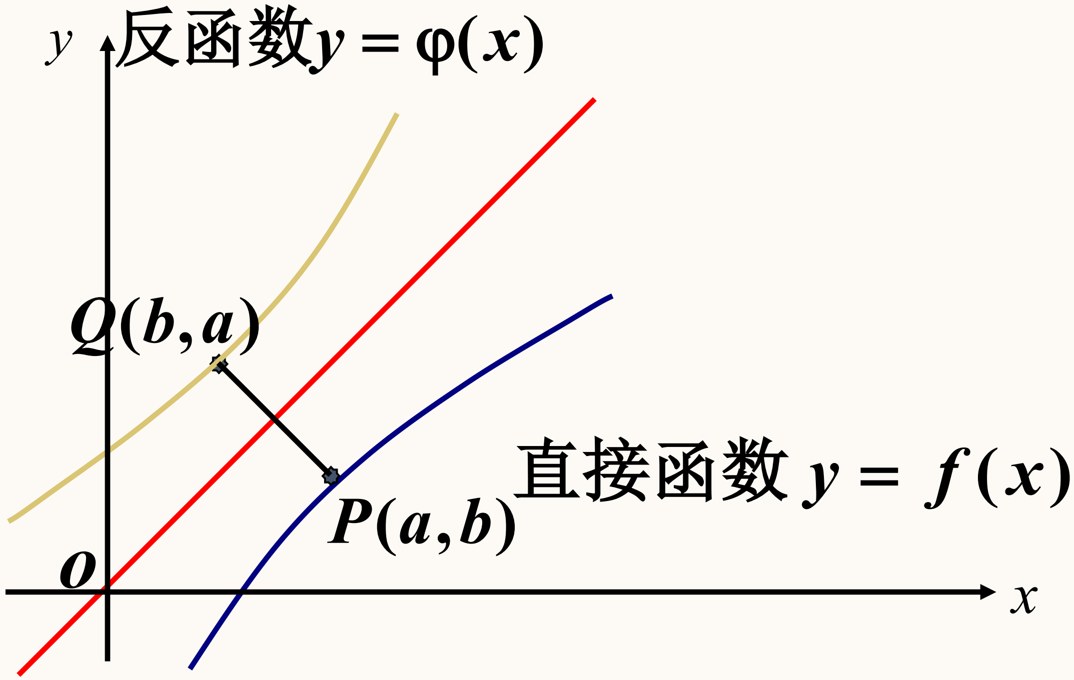
4. 函数的周期性:

设函数$f(x)$的定义域为D, 如果存在一个不为零的数l,使得对于任一$x \in D, (x \pm l) \in D$. 则称$f(x)$为周期函数,l称为$f(x)$的周期. 且$f(x+l) = f(x)$恒成立.

（通常说周期函数的周期是指其最小正周期）.



四、反函数



直接函数与反函数的图形关于直线$y=x$对称.

五、小结

基本概念

集合, 区间, 邻域, 常量与变量, 绝对值.

函数的概念

函数的特性

有界性, 单调性, 奇偶性, 周期性.

反函数

思考题

设$\forall x>0$，函数值$f(\frac{1}{x})=x+\sqrt{1+x^2}$，求函数$y=f(x)\ (x>0)$的解析表达式.

思考题解答

设 $\dfrac{1}{x}=u$

则 $f(u)=\dfrac{1}{u}+\sqrt{1+\dfrac{1}{u^2}}=\dfrac{1+\sqrt{1+u^2}}{u}$,

故 $f(x)=\dfrac{1+\sqrt{1+x^2}}{x}$. $(x>0)$

练 习 题

一、填空题:

1、若$f\left(\frac{1}{t}\right)=\frac{5}{t}+2t^2$, 则$f(t)=$ ____________,

$f(t^2+1)=$ ____________.

2、若$\phi(t)=\begin{cases}1, |x|\le\frac{\pi}{3}\\ |\sin x|, |x|>\frac{\pi}{3}\end{cases}$,

则$\phi(\frac{\pi}{6})=$__________, $\phi(\frac{\pi}{3})=$__________.

3、不等式$|x-5|<1$的区间表示法是__________.

4、设$y=x^2$, 要使 $x\in U(0,\delta)$时， $y\in U(0,2)$,

须δ ___________.

二、证明 $y=\lg x$ 在$(0,+\infty)$上的单调性.

三、证明任一定义在区间$(-a,a)$ $(a>0)$上的函数可表示成一个奇函数与一个偶函数之和.

四、设 $f(x)$是以 2 为周期的函数,

且 $f(x)=\begin{cases} x^2, -1<x<0 \\ 0,\ 0\le x<1 \end{cases}$, 试在$(-\infty,+\infty)$上绘出 $f(x)$的图形.

五、证明：两个偶函数的乘积是偶函数，两个奇函数的乘积是偶函数，偶函数与奇函数的乘积是奇函数.

六、证明函数 $y=\dfrac{ax-b}{cx-a}$的反函数是其本身.

七、求 $f(x)=\dfrac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}$的反函数，并指出其定义域.

练习题答案

一、1、$5t+\frac{2}{t^2},\ 5(t^2+1)+\frac{2}{(t^2+1)^2}$；　　2、1, 1；

3、(4, 6)；　　4. $\in(0,\sqrt{2}]$.

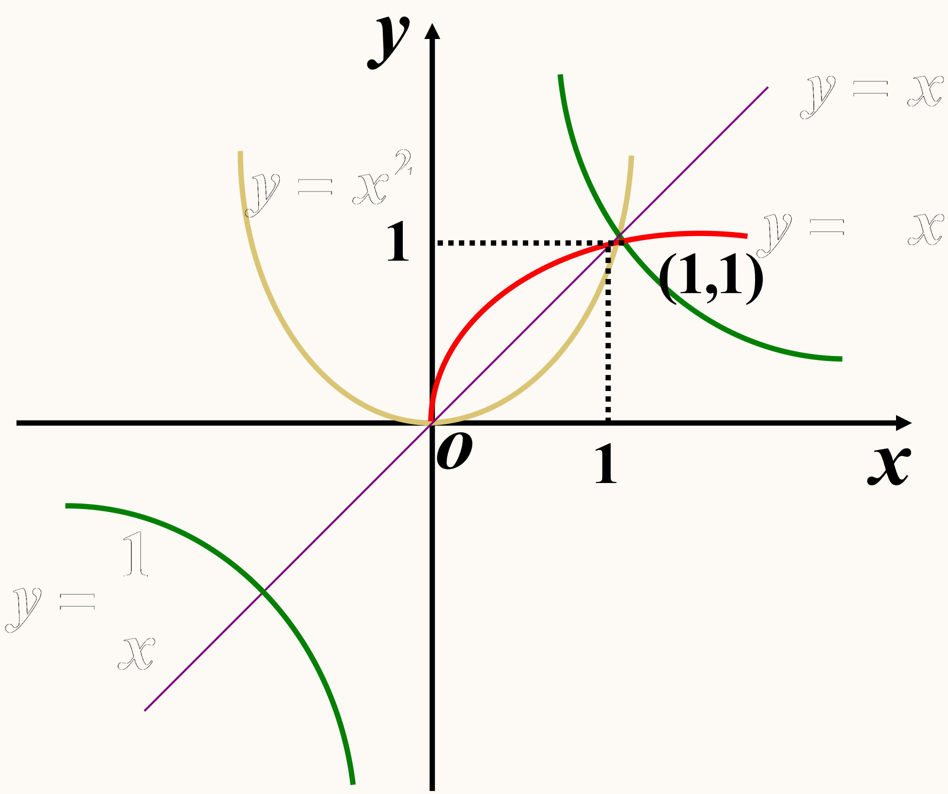
七、$y=\ln\sqrt{\frac{1+x}{1-x}},(-1,1)$.

第二节初等函数

一、基本初等函数
二、复合函数 初等函数
三、双曲函数与反双曲函数
四、小结 思考题

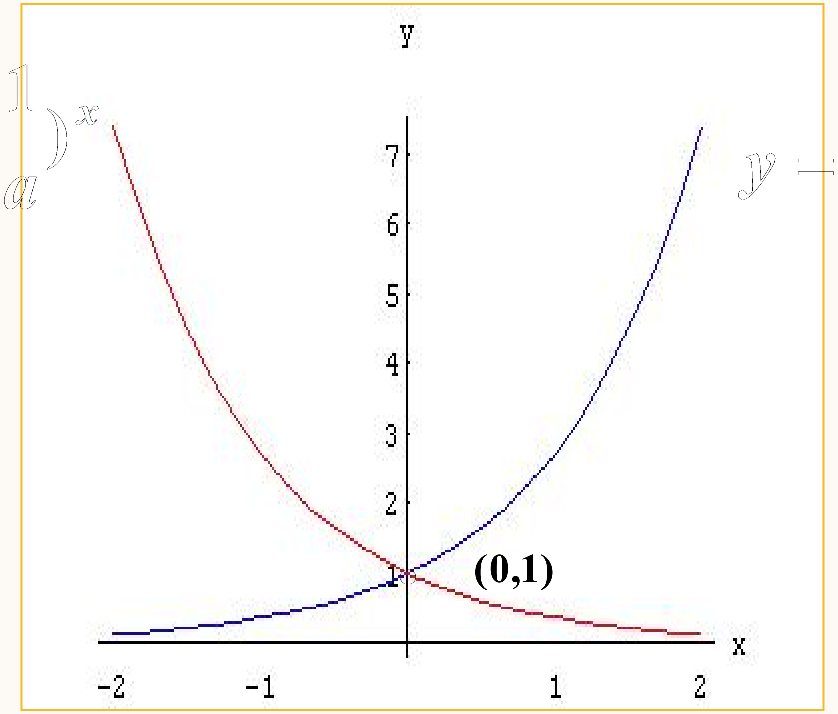
一、基本初等函数

1.幂函数 $y = x^{\mu}$ （μ是常数）



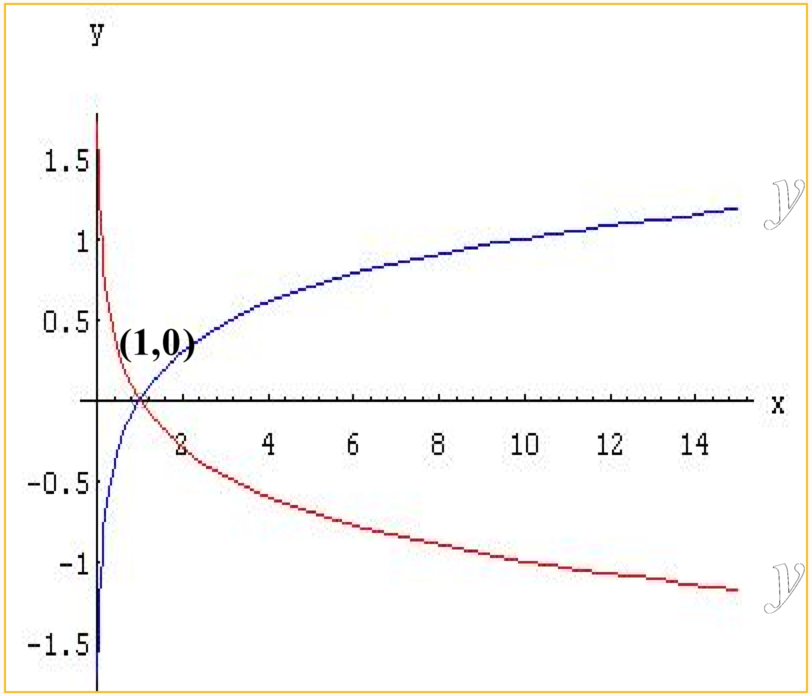
2.指数函数 $y = a^x \quad (a > 0, a \neq 1)$

$y = e^x$



$(a > 1)$

3.对数函数 $y=\log_a x \quad (a>0, a\neq 1)$ $y=\ln x$



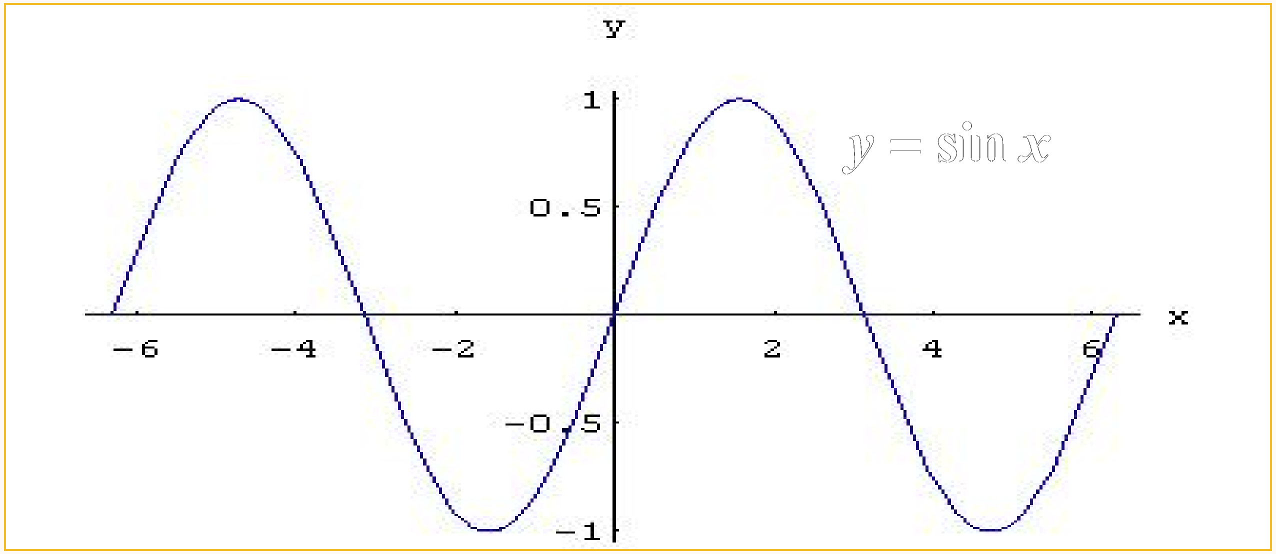
$y=\log_a x$

$(a>1)$

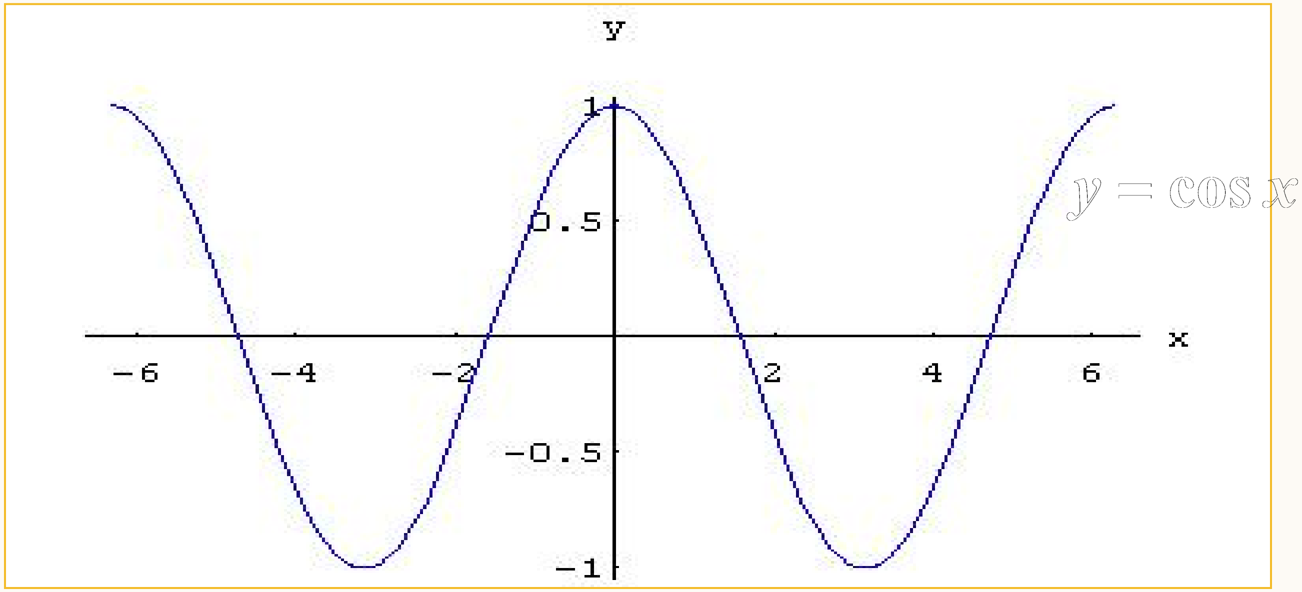
$y=\log_{\frac{1}{a}} x$

4.三角函数

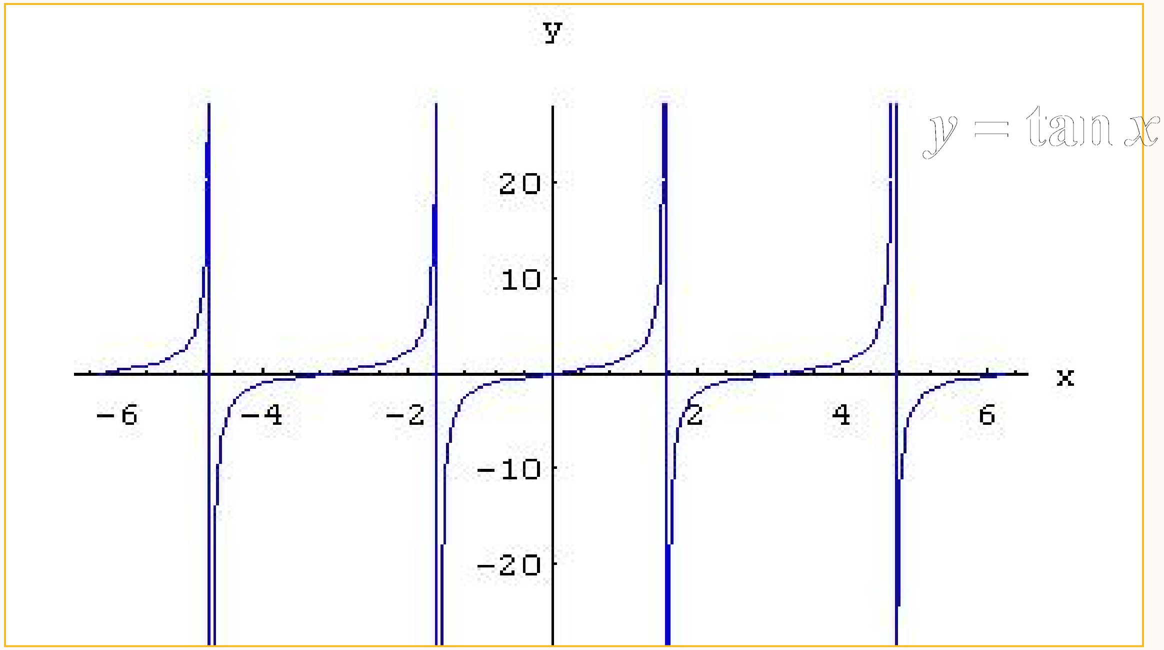
正弦函数 $y = \sin x$



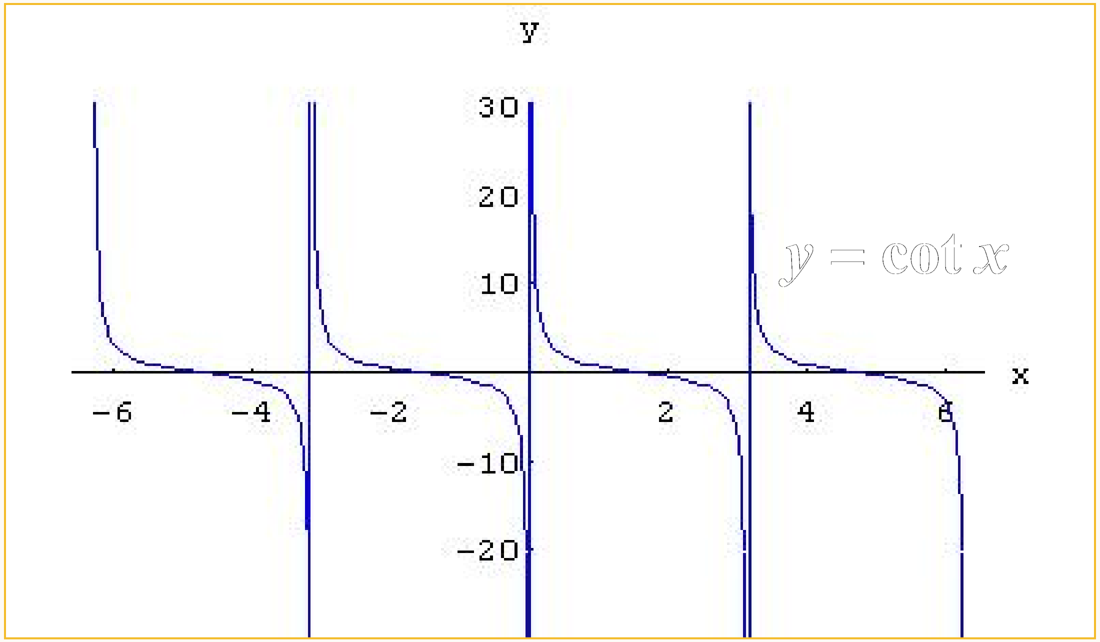
余弦函数 $y = \cos x$



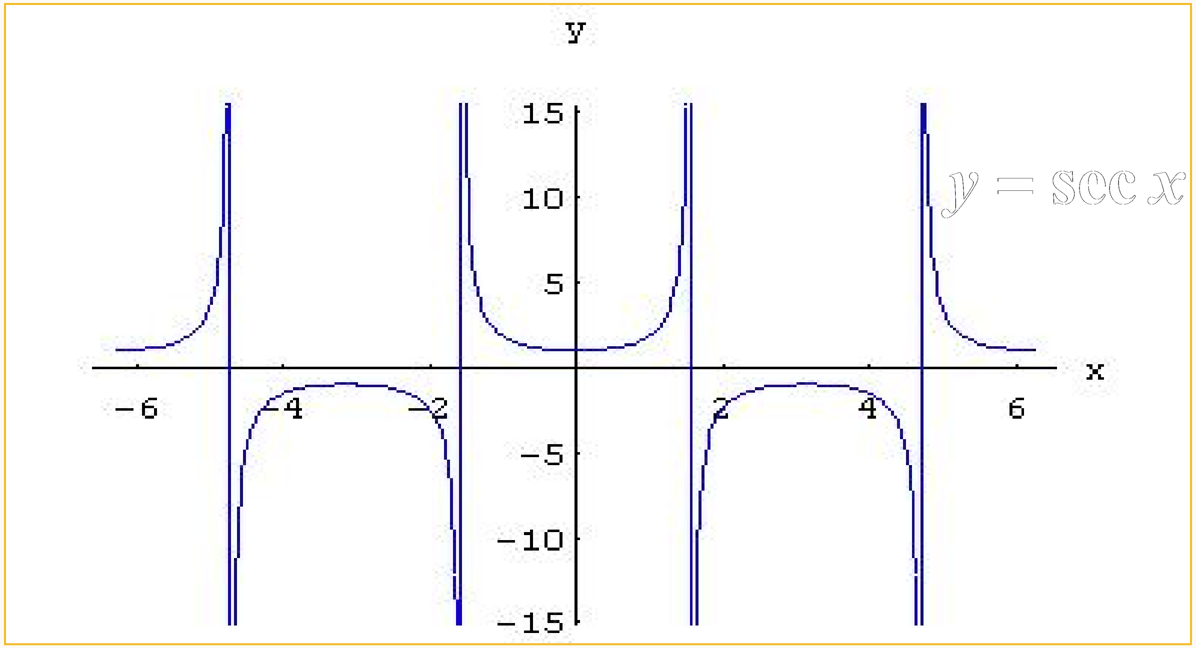
正切函数 $y = \tan x$



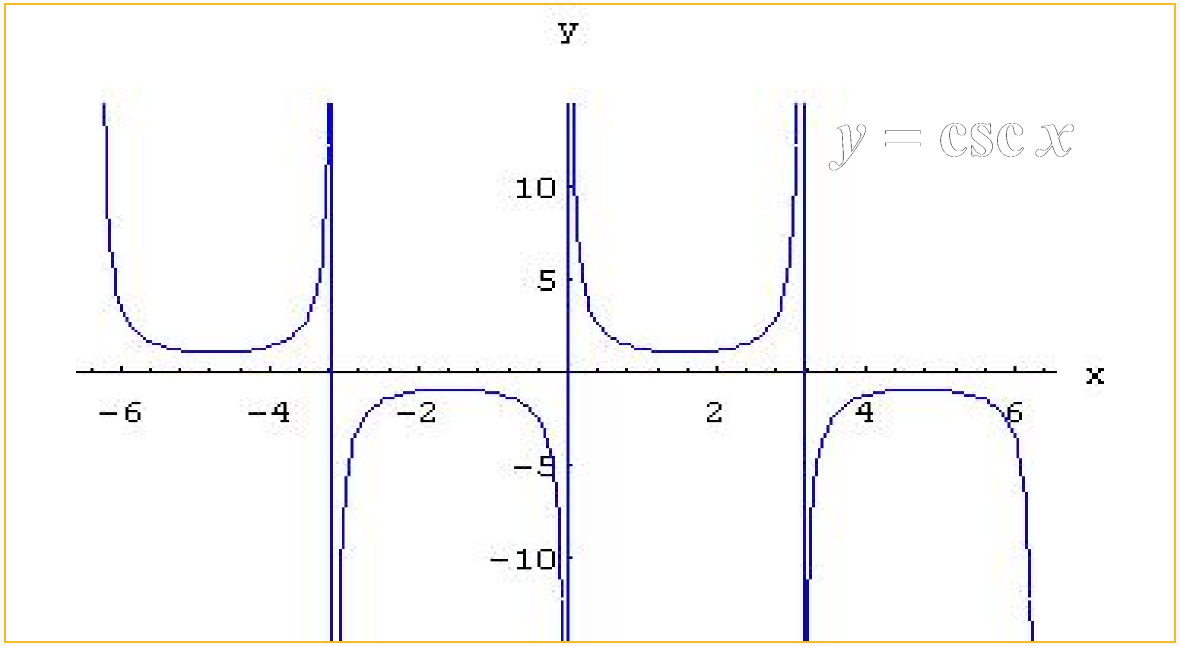
余切函数 $y = \cot x$



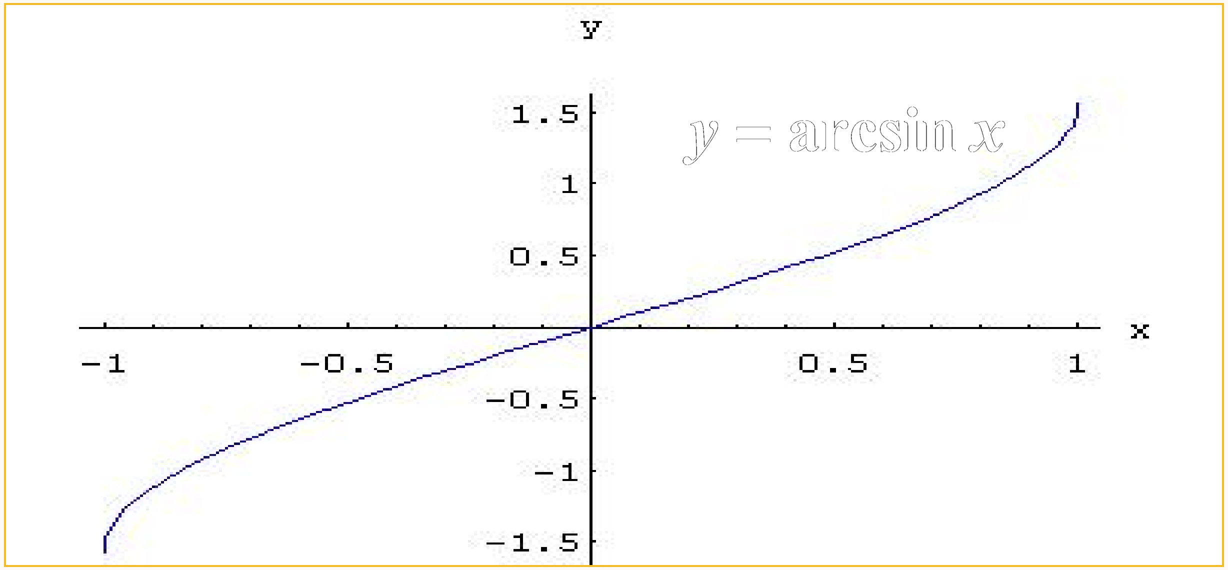
正割函数 $y = \sec x$



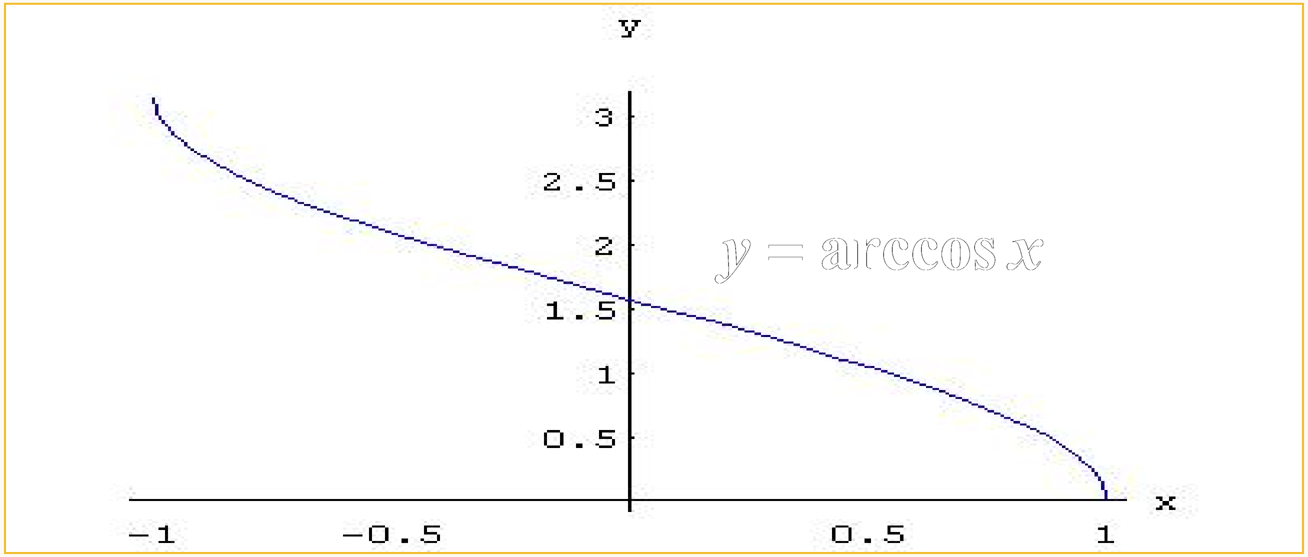
余割函数　$y=\csc x$



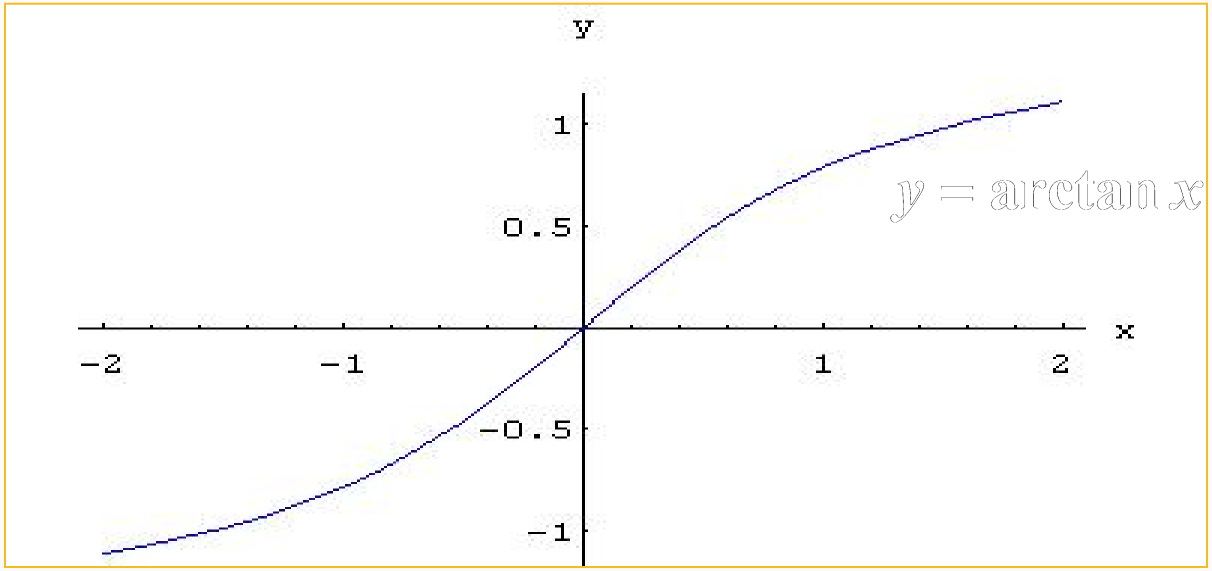
5.反三角函数　　反正弦函数 $y = \arcsin x$



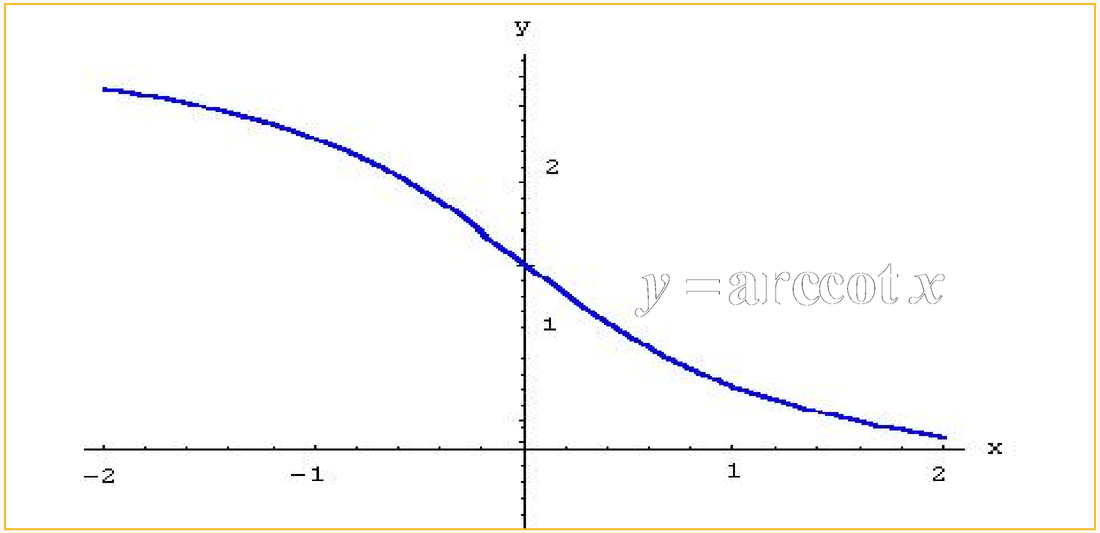
反余弦函数 $y = \arccos x$



反正切函数 $y = \arctan x$



反余切函数 $y = \operatorname{arccot} x$



幂函数,指数函数,对数函数,三角函数和反三角函数统称为基本初等函数.

二、复合函数 初等函数

1.复合函数

设 $y=\sqrt{u}$, $u=1-x^2$, $\longrightarrow$ $y=\sqrt{1-x^2}$

定义： 设函数 $y=f(u)$ 的定义域 D_f，而函数 $u=\varphi(x)$ 的值域为 Z_φ，若 $D_f \cap Z_\varphi \neq \varnothing$，则称函数 $y=f[\varphi(x)]$ 为 x 的复合函数.

$x \leftarrow$ 自变量， $u \leftarrow$ 中间变量， $y \leftarrow$ 因变量，

注意: 1.不是任何两个函数都可以复合成一个复合函数的;

例如 $y = \arcsin u$, $u = 2 + x^2$; $y \neq \arcsin(2 + x^2)$

2.复合函数可以由两个以上的函数经过复合构成.

例如 $y = \sqrt{\cot\frac{x}{2}}$, $y =\quad u$, $u = \cot v$, $v = \frac{x}{2}$.

2.初等函数 由常数和基本初等函数经过有限次四则运算和有限次的函数复合步骤所构成并可用一个式子表示的函数,称为初等函数.

例1 设 $f(x)=\begin{cases} e^x, & x<1 \\ x, & x\geq 1 \end{cases}$, $\varphi(x)=\begin{cases} x+2, & x<0 \\ x^2-1, & x\geq 0 \end{cases}$,

求 $f[\varphi(x)]$.

解 $f[\varphi(x)]=\begin{cases} e^{\varphi(x)}, & \varphi(x)<1 \\ \varphi(x), & \varphi(x)\geq 1 \end{cases}$

1^0 当 $\varphi(x)<1$ 时,

或 $x<0$, $\varphi(x)=x+2<1$, $\Longrightarrow$ $x<-1$;

或 $x\geq 0$, $\varphi(x)=x^2-1<1$, $\Longrightarrow$ $0\leq x<\sqrt{2}$;

2^0 当$\varphi(x) \geq 1$时,

或 $x < 0$, $\varphi(x) = x + 2 \geq 1$, $\Longrightarrow$ $-1 \leq x < 0$;

或 $x \geq 0$, $\varphi(x) = x^2 - 1 \geq 1$, $\Longrightarrow$ $x \geq \sqrt{2}$;

综上所述

$$f[\varphi(x)] = \begin{cases} e^{x+2}, & x < -1 \\ x + 2, & -1 \leq x < 0 \\ e^{x^2-1}, & 0 \leq x < \sqrt{2} \\ x^2 - 1, & x \geq \sqrt{2} \end{cases}.$$

三、双曲函数与反双曲函数

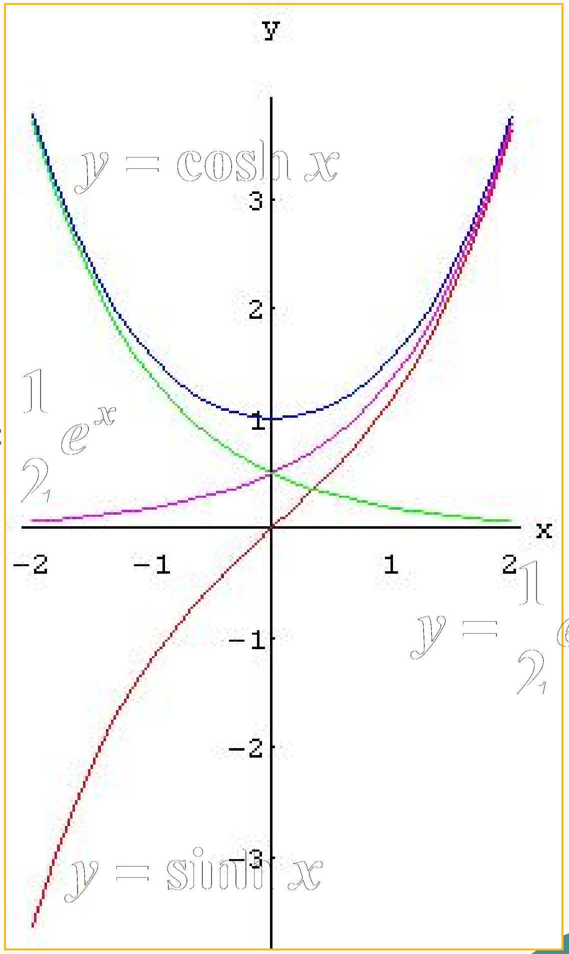
1.双曲函数

双曲正弦 $\sinh x = \dfrac{e^{x} - e^{-x}}{2}$

$D:(-\infty,+\infty)$, 奇函数.

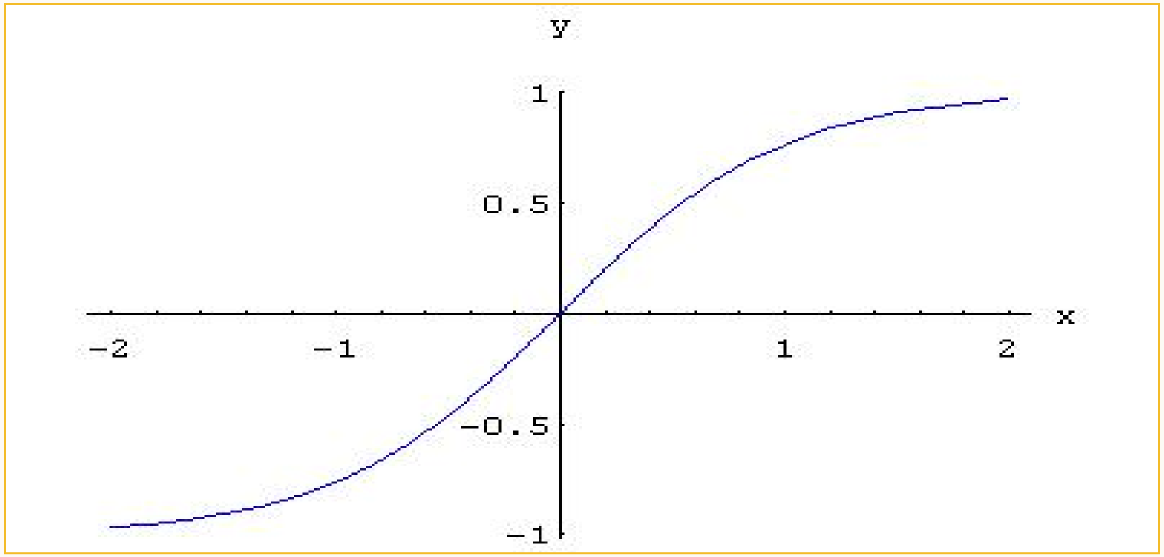
双曲余弦 $\cosh x = \dfrac{e^{x} + e^{-x}}{2}$

$D:(-\infty,+\infty)$, 偶函数.



$$\text{双曲正切}\ \tanh x = \frac{\sinh x}{\cosh x} = \frac{e^{x} - e^{-x}}{e^{x} + e^{-x}}$$

$D:(-\infty,+\infty)$　　奇函数,　　有界函数,



双曲函数常用公式

$$\sinh(x \pm y) = \sinh x \cosh y \pm \cosh x \sinh y;$$

$$\cosh(x \pm y) = \cosh x \cosh y \pm \sinh x \sinh y;$$

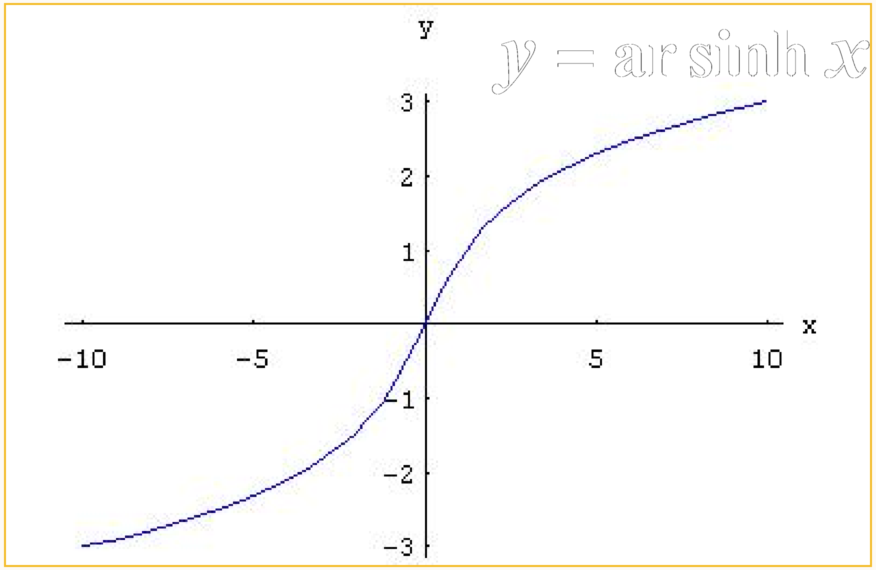
$$\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1;$$

$$\sinh 2x = 2\sinh x \cosh x;$$

$$\cosh 2x = \cosh^2 x + \sinh^2 x.$$

2.反双曲函数

反双曲正弦 $y = \operatorname{arsinh} x$;



$$y = \operatorname{arsinh} x$$
$$= \ln(x + \sqrt{x^2 + 1}).$$

$D: (-\infty, +\infty)$

奇函数,

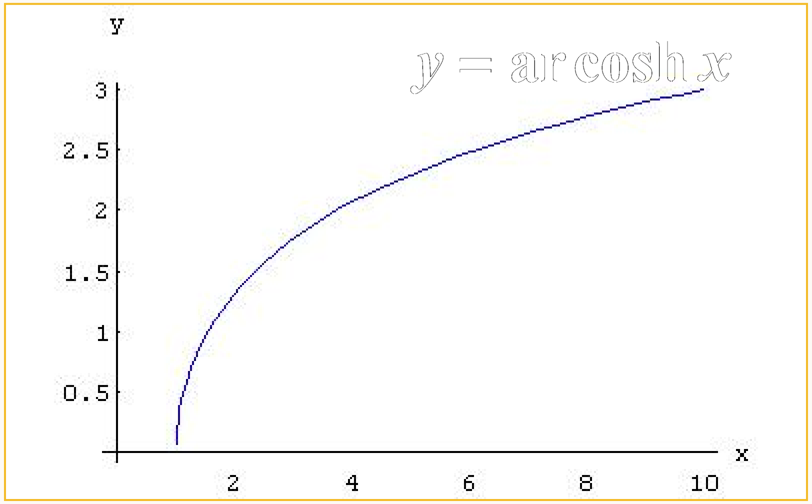
在 $(-\infty, +\infty)$ 内单调增加.

反双曲余弦 $y = \operatorname{ar}\cosh x$

$y = \operatorname{arcosh} x$

$= \ln(x + \sqrt{x^2 - 1}).$

$D: [1, +\infty)$



在 $[1, +\infty)$ 内单调增加.

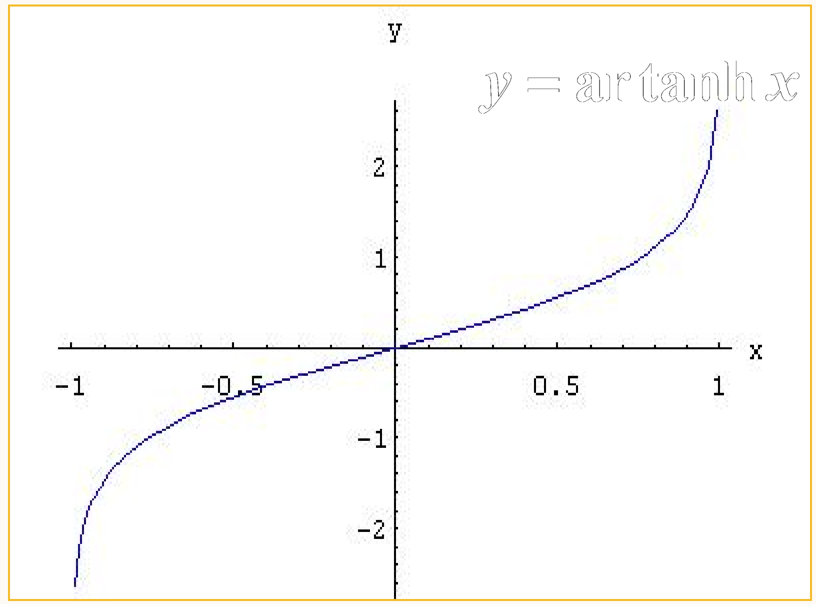
反双曲正切 $y = \operatorname{ar}\tanh x$

$y = \operatorname{artanh} x$

$$= \frac{1}{2}\ln\frac{1+x}{1-x}.$$

$D: (-1,1)$

奇函数,



在 $(-1,1)$ 内单调增加.

四、小结

函数的分类：

- 函数
  - 初等函数
    - 代数函数
      - 有理函数
        - 有理整函数（多项式函数）
        - 有理分函数（分式函数）
      - 无理函数
    - 超越函数
  - 非初等函数（分段函数，有无穷多项等函数）

思考题

下列函数能否复合为函数$y = f[g(x)]$，若能，写出其解析式、定义域、值域.

(1) $y = f(u) = \sqrt{u}$, $u = g(x) = x - x^2$

(2) $y = f(u) = \ln u$, $u = g(x) = \sin x - 1$

思考题解答

(1) $y = f[g(x)] = \sqrt{x - x^2}$

$x \in D = \{x \mid 0 \le x \le 1\}$, $f(D) = [0, \frac{1}{2}]$

(2) 不能. $\because$ $g(x) = \sin x - 1 \le 0$

$g(x)$的值域与$f(u)$的定义域之交集是空集.

感谢聆听

主讲人：乌兰察布开放大学　赵晓燕

《高等数学基础》课程网络教学实施团队：李燕清